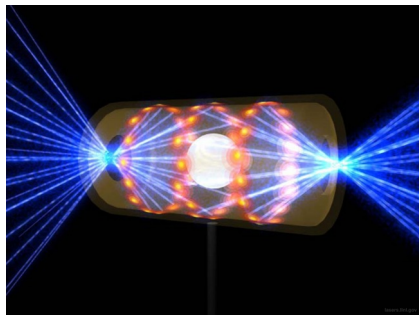


Etude du couplage du modèle aux moments M1 et des équations de Maxwell.

Bruno Dubroca, Stephane Brull, Emmanuel d'Humières



Guisset Sébastien

Contexte : Simulation numérique des plasmas.

- Production d'énergie : Fusion par confinement inertiel.
↔ Plasmas chauds et denses.
- Expériences en laboratoire difficiles et coûteuses.
↔ Simulation numérique particulièrement utile.
- Résolution numérique des équations.
↔ **Besoin de méthodes numériques précises, robustes et rapides.**
- Étude du transport de particules dans un plasma chaud.

Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Le modèle M1
- 3 Cas test : Double faisceau
 - Problème considéré
 - Résultats
- 4 Schéma Asymptotic-Preserving
 - Processus collisionnels
 - Problème du schéma classique
 - Reformulation de l'équation de Maxwell-Ampère
 - Cas test de Batishchev
- 5 Conclusion et Perspectives

Introduction

Plasma : ensemble d'atomes partiellement ou complètement ionisés.

Deux effets prédominant :

- Collisions entres particules.
- Effets électromagnétiques collectifs.

Grandeurs caractéristiques :

- Longueur de Debye : λ_{De}
- Libre parcours moyen : λ_{ei}

$$\alpha = \frac{\lambda_{De}}{\lambda_{ei}}$$

Introduction

Description cinétique :

Caractérisation par une fonction de distribution : $f(t, x, v)$

↪ Résolution de l'équation cinétique Vlasov-Fokker-Planck :

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_x \cdot (vf)}_{\text{terme d'advection}} + \underbrace{\nabla_v \cdot \left(\frac{q}{m} (E + v \times B) f \right)}_{\text{terme de force}} = \underbrace{C_{e,e}(f, f) + C_{e,i}(f)}_{\text{termes de collisions}}$$

Avantage : description précise

Problème : temps de calcul trop long

Introduction

Prise aux moments en vitesse (moyenne)
Cinétique \implies Hydrodynamique

Description hydrodynamique :

Caractérisation par des grandeurs hydrodynamiques : ρ, T, u

Avantage : peu coûteux

Problème : description pas assez précise

Introduction au modèle aux moments M1

Description intermédiaire (compromis) :

Prise aux moments en angle

Cinétique \implies Modèle aux moments M1

Avantages : Moins coûteuse que la description cinétique et plus précise que la description hydrodynamique.

Trois premiers moments de f par rapports à Ω :

$$f_0(\zeta) = \zeta^2 \int_{S^2} f(\Omega, \zeta) d\Omega, \quad S^2 \text{ la sphère unit e}$$

$$f_1(\zeta) = \zeta^2 \int_{S^2} f(\Omega, \zeta) \Omega d\Omega, \quad \Omega = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \text{ direction de propagation}$$

$$f_2(\zeta) = \zeta^2 \int_{S^2} f(\Omega, \zeta) \Omega \otimes \Omega d\Omega. \quad \zeta = |\vec{v}|$$

Le modèle M1

Par intégration par rapport à Ω l'équation cinétique devient¹ :

$$\begin{cases} \partial_t f_0 + \nabla_x \cdot (\zeta f_1) + \partial_\zeta \left(\frac{qE}{m} f_1 \right) = Q_0(f_0), \\ \partial_t f_1 + \nabla_x \cdot (\zeta f_2) + \partial_\zeta \left(\frac{qE}{m} f_2 \right) - \frac{qE}{m\zeta} (f_0 - f_2) = Q_1(f_1) + Q_0(f_1). \end{cases}$$

Détermination de f_2 en fonction de f_0 et f_1 : problème de minimisation d'entropie.

$$\min_{g \geq 0} \left\{ \mathcal{H}(g) \ / \ \forall \zeta \in \mathcal{R}^+, \int_{S^2} g(\Omega, \zeta) d\Omega = f_0(\zeta), \int_{S^2} \Omega g(\Omega, \zeta) d\Omega = f_1(\zeta) \right\}$$

$$\text{où } \mathcal{H}(g) = \int_{\mathcal{R}^3} [g \ln(g) - g] dv \text{ entropie de Boltzmann.}$$

1. J. Mallet, S. Brull, B. Dubroca, C.I.C.P. 2013.

Le modèle M1

Le principe de minimisation d'entropie impose^{2, 3} :

$$f = \rho(\zeta) \exp(-\Omega \cdot a(\zeta)) \geq 0,$$

où $\rho(\zeta) \in \mathbb{R}^+$ et $a(\zeta) \in \mathbb{R}^3$.

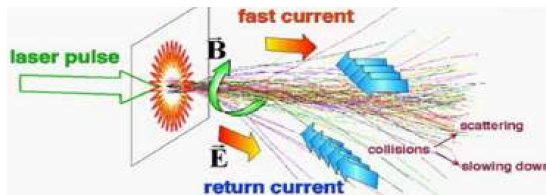
Expression de f_2 :

$$f_2 = f_0 \left(\frac{1 - \chi}{2} Id + \frac{3\chi - 1}{2} \frac{f_1}{|f_1|} \otimes \frac{f_1}{|f_1|} \right), \quad \text{avec } \chi = \frac{|a|^2 - 2|a| \coth(|a|) + 2}{|a|^2}.$$

2. G.N. Minerbo, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, 1978.

3. B. Dubroca and J.L. Feugeas. C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I, 1999.

Cas test du double faisceaux (non-collisionnel)

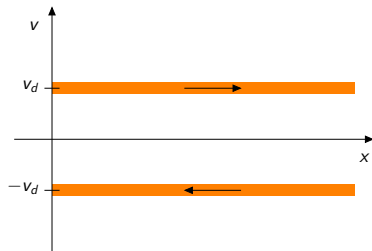


Importance pour
l'interaction laser-plasma.

Condition initiales :

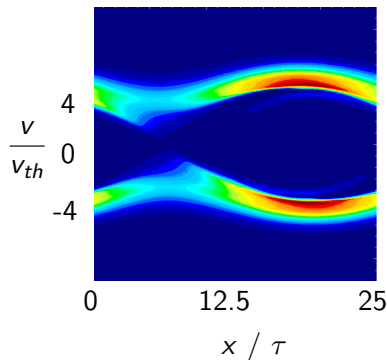
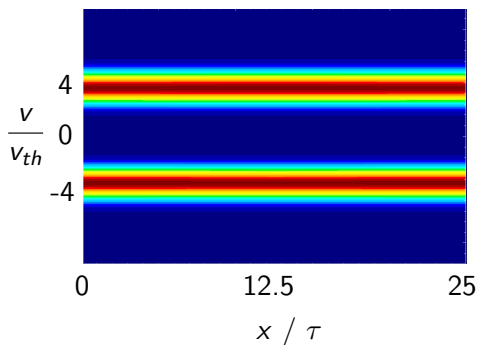
$$f(0, x, v) = \frac{1}{2}(1 + A \cos(kx)) \exp(-(v - v_d)^2) + \frac{1}{2}(1 - A \cos(kx)) \exp(-(v + v_d)^2)$$

$$E(0, x) = 0$$



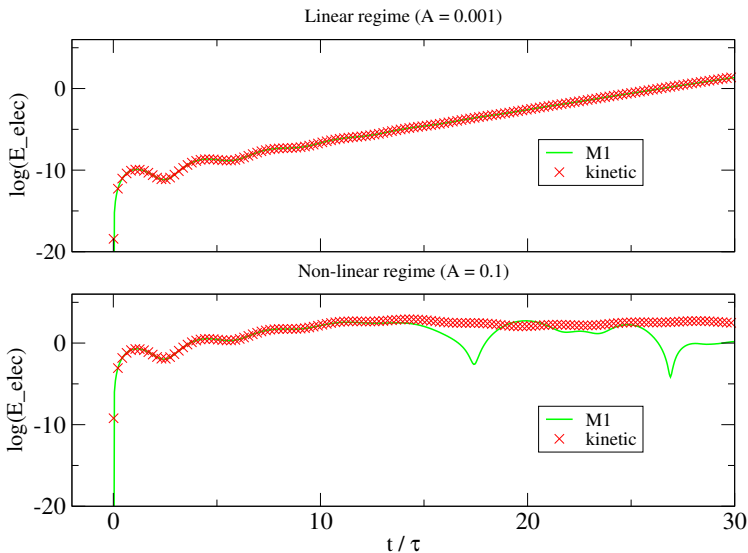
Résultats

Représentation de la fonction distribution au temps initial et au temps final ($30 \tau_{pe}$) :



Résultats

Comparaison des résultats avec un code cinétique Fokker-Planck :



Processus collisionnels

Adimensionnement utilisé pour les processus collisionnels :

$$\tilde{t} = \nu_{e,i} t, \quad \tilde{x} = x / \lambda_{e,i}, \quad \tilde{v} = v / v_{th}.$$

Système d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Modèle M1 adimensionné} \\ \frac{\partial E}{\partial t} - \frac{1}{\beta^2} \nabla_x \times B = -\frac{j}{\alpha^2}, \\ \frac{\partial B}{\partial t} + \nabla_x \times E = 0, \\ \nabla_x \cdot E = \frac{1}{\alpha^2} (1 - n), \\ \nabla_x \cdot B = 0. \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\lambda_{De}}{\lambda_{ei}} \quad \text{et} \quad \beta = v_{th}/c.$$

Problème du schéma classique

Equation de Maxwell-Ampère électrostatique :

$$\frac{E^{n+1} - E^n}{\Delta t} = -\frac{j^{n+1}}{\alpha^2}$$

Si $\lambda_{ei} \gg \lambda_{De}$, quasi-neutralité : $\alpha \rightarrow 0$

$$j^{n+1} \implies 0$$

$$E^{n+1} = ?$$

Condition de stabilité pour le schéma classique : $\Delta t \approx \alpha$

Reformulation de l'équation de Maxwell-Ampère

Equation d'évolution sur f_1 :

$$\frac{f_1^{n+1} - f_1^n}{\Delta t} + \nabla_x \cdot (\zeta f_2^n) + \partial_\zeta \left(\frac{qE^{n+1}}{m} f_2^n \right) - \frac{qE^{n+1}}{m\zeta} (f_0^n - f_2^n) = Q_0(f_1^n) + Q_1(f_1^n)$$

Courant électrique : $j = q \int_\zeta \zeta f_1 d\zeta$

$$\begin{cases} \frac{j^{n+1} - j^n}{\Delta t} = \beta_1(f_0, f_1) E^{n+1} + \beta_2(f_0, f_1) \\ \frac{E^{n+1} - E^n}{\Delta t} = -\frac{j^{n+1}}{\alpha^2} \end{cases}$$

$$E^{n+1} = \frac{-\frac{\alpha^2 E^n}{\Delta t^2} + \beta_2(f_0, f_1) + \frac{j^n}{\Delta t}}{-\frac{\alpha^2}{\Delta t^2} - \beta_1(f_0, f_1)}$$

Si $\alpha \rightarrow 0$ nous pouvons calculer E^{n+1} , Δt n'est pas contraint par α .

Méthodes Asymptotic-Preserving

- Origines des méthodes Asymptotic-Preserving⁴.

$$\begin{array}{ccc} P_{\Delta x, \Delta t}^{\alpha} & \xrightarrow{(\Delta x, \Delta t) \rightarrow 0} & P^{\alpha} \\ \downarrow \alpha \rightarrow 0 & & \downarrow \alpha \rightarrow 0 \\ P_{\Delta x, \Delta t}^0 & \xrightarrow{(\Delta x, \Delta t) \rightarrow 0} & P^0 \end{array}$$

Pas de nécessité de réduire $(\Delta t, \Delta x)$ lorsque $\alpha \rightarrow 0$

4. S. Jin, SIAM J. Sci. Comp. (1999).

Cas test de Batishchev⁵

Relaxation d'un profil de température localisé.

Initialement :

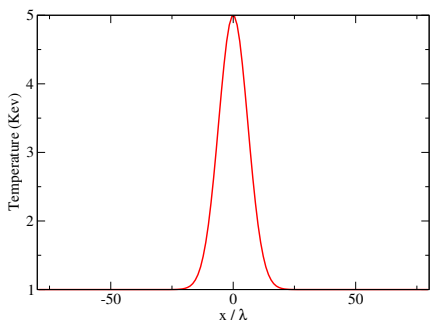
$$T_e(0, x) = T_0 + T_1 \exp\left(-\frac{x^2}{D^2}\right)$$

$$T_0 = 1\text{Kev}, T_1 = 4\text{Kev}, D = 8,44\lambda_{ei}$$

$$\begin{cases} f_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1}{T(x)}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2T(x)}\right) \\ f_1 = 0 \end{cases}$$

$$\alpha = 4.10^{-4}$$

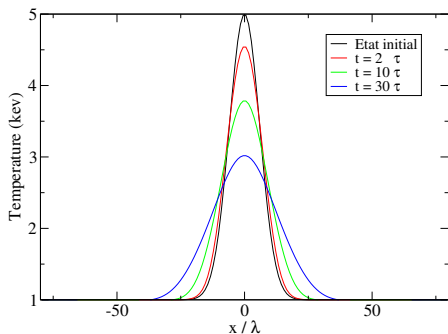
Profil de température initial



5. O.V Batishchev & al Physics of Plasmas (2002).

Résultats

Représentation de la Température en fonction de l'espace



Représentation de $|E|$ en fonction de l'espace

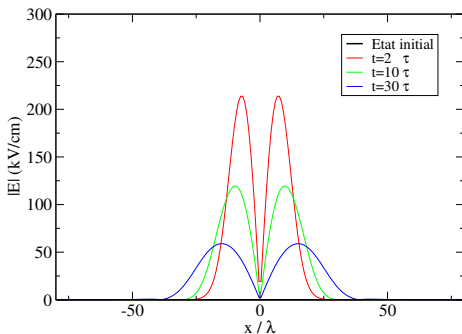
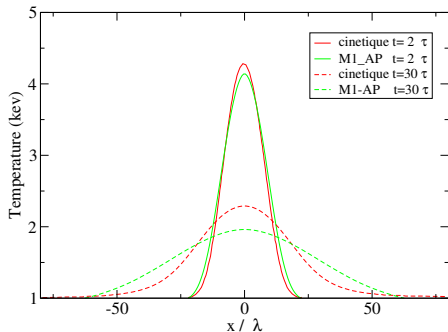


Schéma classique instable !

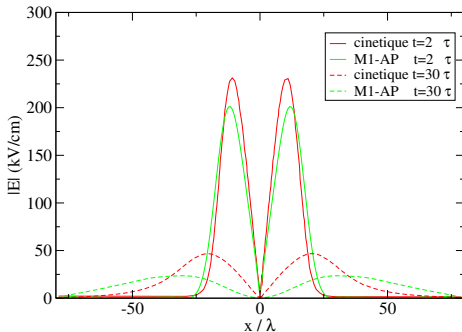
Stable même si $\alpha = 0$.

Comparaison

Représentation de la température en fonction de l'espace



Représentation de $|E|$ en fonction de l'espace



Cinétique (Code OSHUN⁶) : 2 jours sur 80 processeurs.

M1-AP : 3 minutes sur 1 processeur.

6. M. Tzoufras & al J. Comput. Phys. (2011).

Conclusion

- Couplage M1 - Maxwell.
- Schéma AP validé sur deux cas tests limites :
 - Double faisceaux : effets collectifs importants.
 - Batishchev : effets collisionnels importants, $\alpha \rightarrow 0$.
- Schéma précis et très rapide.

Perspectives

A court terme :

- Étude de stabilité du schéma AP.
- Champ magnétique.

A long terme :

- Mouvement des ions.
- Deux dimensions d'espace.
- Importance des effets cinétiques pour l'allumage par choc.

Merci de votre attention